Ref. Petit guide du calcul diff ; Rouvière, p. 166.

Théorème : Inverser sans inverser :

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $X_0 \in GL_n(\mathbb{R})$ tq pour $\|\cdot\|$ norme d'algèbre (ss-multiplicative) $\|I_n - AX_0\| < 1$ alors la suite $(X_n)_n$ définie par $X_{n+1} = 2X_n - X_n A X_n$ converge vers A^{-1}.

Preuve : Soit $F : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X \longmapsto 2X - XAX \end{cases}$.

1) • F est polynomiale en les coeffs de X donc F est $\mathcal{C}^1$.

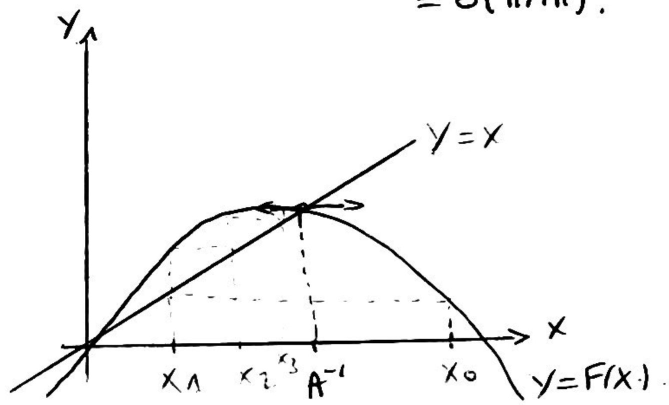
• $F(A^{-1}) = 2A^{-1} - A^{-1} = A^{-1}$.

• Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $F(X+H) - F(X) = 2H - HAX - XAH \underbrace{- HAH}_{= o(\|H\|)}$.

donc $DF(X) \cdot H = 2H - HAX - XAH$.

donc $DF(A^{-1}) = 0$.

(A^{-1} pt fixe super attractif de F i.e $dF(A^{-1}) = 0$).



2) Soit $(X_n)_n$ tq $X_{n+1} = F(X_n)$.

Par $\mathcal{C}$ de DF ; pour $0 < \varepsilon < 1$, $\exists \alpha > 0$ tq $\|X - A^{-1}\| \leq \alpha$.

$\Rightarrow |||DF(X)||| \leq \varepsilon$. Donc par IAF :

$\|X_{n+1} - A^{-1}\| = \|F(X_n) - F(A^{-1})\| \leq \varepsilon \|X_n - A^{-1}\| \leq \|X_n - A^{-1}\|$.

si $\|X_n - A^{-1}\| \leq \alpha$. C'est donc vérifié par récurrence sur n dès que $\|X_0 - A^{-1}\| \leq \alpha$. On a alors :

$\left.\|X_n - A^{-1}\| \leq \varepsilon^n \alpha .\right\} \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A^{-1}$

3) $(X_n)_n$ a une cv d'ordre 2 vers A^{-1} dès que $\|I_n - AX_0\| < 1$:

On a $AF(X) = 2AX - (AX)^2$.

donc $I_n - AF(X) = (I_n - AX)^2$. $\forall X \in M_n(\mathbb{R})$.

c'est-à-dire $\varphi(F(X)) = (\varphi(X))^2$ avec $\varphi(X) = I_n - AX$.

Posons $Y_n = \varphi(X_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$Y_{n+1} = \varphi(X_{n+1}) = \varphi(F(X_n)) = \varphi(X_n)^2 = Y_n^2.$$

donc $Y_n = Y_0^{2^n}$

et $A^{-1} - X_n = A^{-1}(I_n - AX_0)^{2^n}$. car $Y_n = Y_0^{2^n}$.

Alors ~~$\|Y_n\| \leq \|Y_0\|^{2^{n-1}} \|Y_{n-1}\|$. donc Y_n cv avec un~~

$$\|Y_n\| \leq \|Y_{n-1}\|^2$$

et
$$\|A^{-1} - X_n\| = \|A^{-1}(I_n - AX_0)^{2^n}\| = \|A^{-1}(I_n - AX_0)^{2^{n-1}}(I_n - AX_0)^{2^{n-1}}\|$$
$$= \|A^{-1}(I_n - AX_0)^{2^{n-1}} A A^{-1}(I_n - AX_0)^{2^{n-1}}\|$$
$$= \|(A^{-1} - X_{n-1})A(A^{-1} - X_{n-1})\|$$
$$\leq \|A\| \times \|A^{-1} - X_{n-1}\|^2.$$

donc il y a cv d'ordre 2 de $(Y_n)_n$ vers 0

et de $(X_n)_n$ vers A^{-1} si $\|Y_0\| = \|I_n - AX_0\| < 1$.

(<u>Rq</u>: $(z_n)_n$ cv d'ordre 2 vers α ssi $z_n \to \alpha$ et $\|z_n - \alpha\| \leq C \times \|z_{n-1} - \alpha\|^2$)

<u>Rq</u>: Prenons $\|\cdot\|$ norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|_2$ de $\mathbb{R}^n$.

Alors $X_0 = \dfrac{{}^tA}{Tr(A^tA)}$ convient. En effet, $I_n - \dfrac{A^tA}{Tr(A^tA)}$ est symétrique.

Donc $\left\| I_n - \dfrac{A^tA}{Tr(A^tA)} \right\|$ = rayon spectral = max des vp.

$$\frac{{}^tX A {}^tA X}{Tr(A{}^tA)} = \frac{{}^t({}^tAX)({}^tAX)}{Tr(A{}^tA)} = \frac{1}{Tr(A{}^tA)} \| {}^tAX\|_2^2 \geqslant 0 .$$ car $Tr(A{}^tA) \neq 0$.

or si $\|{}^tAX\|_2^2 = 0$ alors ${}^tAX = 0$ donc $X = 0$.
car A donc ${}^tA$ inversible.

d'où ${}^tX\left(\frac{A{}^tA}{Tr(A{}^tA)}\right)X > 0$ donc $\frac{A{}^tA}{Tr(A{}^tA)}$ sym réelle définie $\oplus$.

donc $\rho\left(\frac{A{}^tA}{Tr(A{}^tA)}\right) = \left\|\frac{A{}^tA}{Tr(A{}^tA)}\right\| > 0$ et $Tr(A{}^tA)$ vaut la somme des vp de $A{}^tA$ donc $Sp\left(\frac{A{}^tA}{Tr(A{}^tA)}\right) \subset]0;1[$.

donc $Sp\left(I_n - \frac{A{}^tA}{Tr(A{}^tA)}\right) \subset]0;1[$.

donc $\rho\left(I_n - \frac{A{}^tA}{Tr(A{}^tA)}\right) = \left\|I_n - \frac{A{}^tA}{Tr(A{}^tA)}\right\| < 1$.